SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. Cavallucci

PRINCIPIO DI MASSIMO PER MULTIPROCESSI

24 Maggio 1990

Ci proponiamo di esporre una versione del principio di massimo per multiprocessi dovuta a Clarke e Vinter [2], [3]. Tale versione è nata dalla necessità di estendere il principio di massimo per problemi del tipo

$$f(a,b,x(a), x(b)) + \int_a^b L(t,x(t), u(t))dt \to \min$$

$$\dot{x}(t) = \phi(t,x(t),u(t)) \quad \text{q.d. su } [a,b],$$

$$u(t) \in U(t) \quad \text{q.d. su } [a,b],$$

$$x(t) \in \Omega(t) \quad \text{per } a \le t \le b,$$

$$(a,b,x(a), x(b)) \in S,$$

noto [4] per il caso in cui $L(\cdot,x,u)$ e $\phi(\cdot,x,u)$ sono supposte lipschitziane, al caso in cui tali funzioni si suppongono soltanto misurabili. In [4] era stato ottenuto un principio di massimo con tale generalità di ipotesi su L e ϕ solo nel caso in cui l'intervallo [a,b] di definizione delle funzioni $x(\cdot)$ e $u(\cdot)$ fosse costante. Ora si aggiungono alle condizioni che figurano in tale principio di massimo ulteriori condizioni che tengano conto della variabilità dell'intervallo [a,b] e che sono formulate mediante un nuovo concetto di "traccia in un punto" per una funzione misurabile.

Definizione 1. Sia I un intervallo aperto in R, sia $t_0 \in I$ e sia $g : I \to$

R^n misurabile. L'insieme

$$\operatorname*{ess}_{t\to t_0} g(t) = \{x \in R^n \mid \mu(\{t \in I \mid |t-t_0| < \varepsilon,\ |g(t)-x| < \varepsilon\}) > 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0\}$$

si dice *insieme dei valori essenziali di* g *in* t_0.

Osserviamo che se $g = h$ q.d., allora g e h hanno gli stessi valori essenziali, se g ha limite a sinistra e a destra $g(t_0 \pm)$, allora

$$\operatorname*{ess}_{t\to t_0} g(t) = \{g(t_0-), g(t_0+)\},$$

e in particolare che se g è continua in t_0, allora

$$\operatorname*{ess}_{t\to t_0} g(t) = \{g(t_0)\}.$$

Sussistono anche le seguenti proposizioni (cfr. [1], [2]).

Proposizione 1. Siano $I \subset R$, $\Omega \subset R^n$ aperti e sia data la funzione h: $T \times \Omega \to R^n$ tale che

$\Omega \ni x \to h(t,x)$ è continua uniform. rispetto a t,

$I \ni t \to h(t,x)$ è misurabile per ogni x.

Allora la multifunzione

$$I \times \Omega \ni (t,x) \to \operatorname*{ess}_{s \to t} h(s,x)$$

ha il grafico chiuso. Se si suppone inoltre

$$\bigcup_{(t,x) \in I \times \Omega} \operatorname*{ess}_{s \to t} |h(s,x)| \text{ limitato,}$$

allora ha grafico chiuso anche la multifunzione

$$I \times \Omega \ni (t,x) \to \operatorname{co} \operatorname*{ess}_{s \to t} h(s,x).$$

Qui coA indica l'involucro convesso nell'insieme A.

Proposizione 2. Se $g : I \to R$ è essenzialmente limitata, $\operatorname*{ess}_{s \to t} g(s)$ è chiuso e si ha

$$\operatorname*{esslimsup}_{s \to t} g(s) = \min \operatorname*{ess}_{s \to t} g(s),$$

$$\operatorname*{esslimsup}_{s\to t} g(s) = \max \operatorname*{ess}_{s\to t} g(s),$$

dove

$$\operatorname*{essliminf}_{s\to t} g(s) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \max\{y \in R \mid g(s) \geq y \text{ q.d. su }]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\}$$

e una anloga definizione vale per $\operatorname*{esslimsup}_{s\to t} g(s)$.

Per il problema considerato all'inizio facciamo le seguenti ipotesi

U è un boreliano in $R \times R^n$,

Ω è un aperto in $R \times R^n$,

S è un chiuso in $\{(a,b,x,y) \in R\times R\times R^n\times R^n \mid a \leq b\}$,

f è localmente lipschitziana in $R\times R\times R^n\times R^n$,

$\tilde{\phi}(\cdot,x,\cdot)$ è $\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}$ misurabile per ogni x,

$|\tilde{\phi}(t,x,u)| \leq K$ per $(t,x,u) \in R \times \Omega(t) \times U(t)$,

$|\tilde{\phi}(t,x,u) - \tilde{\phi}(t,y,u)| \leq K|x-y|$ per $(t,x,u), (t,y,u) \in R\times\Omega(t) \times U(t)$,

con K = costante, $\tilde{\phi} = (\phi,L)$, $\phi: R\times R^n\times R^m \to R^n$,

$L: R\times R^n \times R^m \to R$, $U(t) = \{u \in R^m \mid (t,u) \in U\}$, e poniamo

$$H(t,x,u,p,\lambda) = p.\ \phi(t,x,u) - \lambda\ L(t,x,u).$$

Il principio di massimo di cui si è detto è espresso dal seguente

Teorema 1. Se $x^*:[a^*,b^*] \to R^n$ assolutamente continua e $u^*: [a^*,b^*) \to R^m$ misurabile è una soluzione del problema considerato, allora esistono i numeri reali $\lambda \in \{0,1\}$, h_o, h_1 e la funzione $p : [a^*,b^*] \to R^n$ assolutamente continua tali che

$$\lambda + |p(b^*)| > 0\ ,$$

$$-\dot{p}(t) \in \partial_x H(t,x^*(t),\ u^*(t),\ p(t),\ \lambda) \quad \text{q.d. su } [a^*,b^*],$$

$$H(t,\ x^*(t),\ u^*(t),\ p(t),\lambda) = \max_{v\in U(t)} H(t,x^*(t),\ v,\ p(t),\ \lambda) \quad \text{q.d.su } [a^*,b^*],$$

$$h_o \in \text{co} \operatorname*{ess\ sup}_{t\to a^*\ \ v\in U(t)} H(t,x^*(a^*),v,p(a^*),\lambda),$$

$$h_1 \in \text{co} \operatorname*{ess\ sup}_{t\to b^*\ \ v\in U(t)} H(t,x^*(b^*),v,p(b^*),\lambda),$$

$$(-h_o,\ h_1,\ p(a^*),\ -p(b^*)) \in N_S\ (z^*) + \lambda\partial f(z^*),$$

essendo $z^* = (a^*,b^*,x(a^*),\ x(b^*))$, N_S il cono normale a S [4] e ∂f il

gradiente generalizzato di f [4].

Per la dimostrazione rimandiamo a [3] e [5].

In [5] è provato un teorema più generale relativo a un problema in cui figurano anche vincoli di stato.

Esempio 1. Consideriamo il problema

$$-T\,x(T) + \int_0^T \alpha(t)u(t)dt \to \min$$

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \quad \text{q.d. in } [0,T],$$

$$u(t) \in [0,1] \qquad \text{" " ",}$$

$$x(o) = 0 \ , \ 0 \leq T \leq T_o \quad (T_o > 2)$$

con la funzione $\alpha(\cdot)$ del tipo

$$\alpha(t) \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ per } 0 \leq t \leq 2 \\ \bar{\alpha} \text{ per } t > 2 \end{cases}$$

In [3] si determina la funzione y(T) = minimo a tempo T costante e si

prova che $y(\cdot)$ ha un minimo locale per $T = 2$ se e solo se $\bar{\alpha} > 5/4$. D'altra parte dal Teorema 1 si ottiene che, affinchè $T = 2$ sia tempo terminale per una soluzione $x^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$, è necessaria la condizione $\bar{\alpha} \geq 5/4$.

Introduciamo ora i multiprocessi [2]. Sono dati:

gli interi positivi k, m_i, u_i per $1 \leq i \leq k$,

le funzioni $\phi_i : R x R^{n_i} x R^{m_i} \to R^n$

le funzioni $L_i : R x R^{n_i} x R^{m_i} \to R$

la funzione $f: \prod_{i=1}^{k} (R x R x R^{n_i} x R^{n_i}) \to R$,

gli insiemi $U_i \subset R \times R^{m_i}$

gli insiemi $X_i \subset R \times R^{n_i}$

Conveniamo di indicare con $\{a_i, b_i, \ldots\}_{i=1}^{k}$ o anche semplicemente con $\{a_i, b_i, \ldots\}$ il punto $((a_1, b_1, \ldots), (a_2, b_2, \ldots), \ldots, (a_k, b_k, \ldots))$.

Definizione 2. Diciamo *multiprocesso* un punto $\{a_i, b_i, x_i(\cdot), u_i(\cdot)\}$ tale che

$a_i \leq b_i$,

$x_i(\cdot)$: $[a_i, b_i] \to R^{n_i}$ assol. continua,

$u_i(\cdot)$: $[a_i, b_i] \to R^{m_i}$ misurabile,

$\dot{x}_i(t) = \phi_i(t, x_i(t), x_i(t), u_i(t))$ q.d. su $[a_i, b_i]$,

$u_i(t) \in U_i(t)$ "

$x_i(t) \in X_i(t)$ "

Supponiamo che i dati verifichino le seguenti condizioni:

(H^1) per ogni $x \in R^{n_i}$, le funzioni $\phi_i(\cdot,k,\cdot)$ e $L_i(\cdot,x,\cdot)$ sono $\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}$ misurabili, dove $\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ rappresenta la classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue (Borel);

(H^2) $U_i \in \mathfrak{B}\,(R \times R^{m_i})$ (boreliano);

esiste una costante K tale che, posto $\tilde{\phi}_i = (\phi_i, L_i)$, riesca

(H3) $|\tilde{\phi}_i\,(t,x,u)| \leq K$ per $(t,x,u) \in R x X_i(t) x U_i(t)$,

(H4) $|\tilde{\phi}_i(t,x,u) - \tilde{\phi}_i(t,x',u)| \leq K\,|x-x'|$ per (t,x,u) e $(t,x',u) \in R x\, X_i(t) \times U_i(t)$;

(H5) f è localmente lipschitziana.

Consideriamo il problema

$$f(\{a_i,b_i,x_i(a_i),x_i(b_i)\}_{i=1}^{k}) + \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} L_i(t,x_i(t),u_i(t))dt \to \min$$

(P) $\{a_i, b_i, x_i(\cdot),\ x_i(b_i)\}_{i=1}^{k}$ = multiprocesso,

$$\{a_i, b_i, x_i(a_i), x_i(b_i)\}_{i=1}^{k} \in S,$$

dove S è un assegnato *insieme chiuso* tale che

$$S \subset \{a_i, b_i, p_i, q_i\} \in \prod_{i=1}^{k} (R x R^{n_i} x R^{n_i}) |\ a_i \le b_i \text{ per } 1 \le i \le k\}$$

Poniamo

$$H_i(t,x,u,p,\lambda) = p \cdot \phi_i(t,x,u) - \lambda L_i(t,x,u),$$

$$h_i(t,x,p,\lambda) = \sup_{u \in V_i(t)} H_i(t,x,u,p,\lambda)$$

Allora si ha il seguente

Teorema 2. Sia $\{a_i^*, b_i^*,\ x_i^*(\cdot),\ u_i^*(\cdot)\}_{i=1}^{k}$ una soluzione per il problema (P) tale che

grafico di $x_i^*(\cdot) \subset$ interno di X_i, $1 \le i \le k$.

Sotto le ipotesi (H1)-(H5), esistono i numeri reali

$\lambda \in \{0,1\}$, h_i^*, k_i^* per $1 \le i \le k$ e le funzioni

$p_i(\cdot)$: $[a_i^*, b_i^*] \to R^{n_i}$ assolutamente continue tali che

$$-\dot{p}_i(t) \in \partial_x H_i(t, x_i^*(t), u_i^*(t), p_i(t), \lambda) \qquad \text{q.d. su } [a_i^*, b_i^*],$$

$$H_i(t, x_i^*(t), u_i^*(t), p_i(t), \lambda) = h_i(t, x_i^*(t), p_i(t), \lambda) \qquad \text{"}$$

$$h_i^* \in \operatorname*{co\,ess}_{t \to a_i^*} h_i(t, x_i^*(a_i^*), p_i(a_i^*), \lambda),$$

$$k_i^* \in \operatorname*{co\,ess}_{t \to b_i^*} h_i(t, x_i^*(b_i), p_i(b_i^*), \lambda),$$

$$(-h_i^*, k_i^*, p_i(a_i^*), -p_i(b_i^*)) \in N_S(z^*) + \lambda f(z^*),$$

$$\lambda + \sum_1^k |p_i(b_i^*)| > 0,$$

dove $z^* = \{a_i^*, b_i^*, x_i^*(a_i^*), x_i^*(b_i^*)\}_{i=1}^k$, N_S e ∂f indicano rispettivamente il cono normale a S e il gradiente generalizzato di f secondo Clarke [4].

Se le funzioni ϕ_i, L_i e gli insiemi U_i non dipendono da t, allora si può aggiungere alle precedenti la condizione

$$h_i = k_i = h_i(t, x_i^*(t), p_i(t), \lambda) \qquad \text{per } a_i^* \le t \le b_i^*.$$

In [2], [3] la dimostrazione viene ricondotta a un teorema analogo formulato, in [2], per multiprocessi relativi a inclusioni differenziali del tipo

$$f(\{a_i,b_i,x_i(a_i),x_i(b_i)\}_{i=1}^{k}) \to \min$$

$$(Q)\qquad \begin{aligned} &\dot{x}_i(t) \in F_i(t,x_i(t)) && \text{q.d. su } [a_i,b_i],\\ &x_i(t) \in X_i(t) && \text{per ogni } t \text{ in } [a_i,b_i],\\ &\{a_i,b_i x_i(a_i),x_i(b_i)\}_{i=1}^{k} \in S, \end{aligned}$$

con le ipotesi (H1)-(H4) sostituite dalle seguenti:

(H'1) $F_i(t,x) \neq \emptyset$ convesso chiuso $\subset R^n$ per $(t,x) \in R \times R^{n_i}$,

(H'2) $F_i(\cdot,x)$ è misurabile per ogni $x \in R^{n_i}$,

(H'3) $F_i(t,x) \subset K\,B$ per ogni $(t,x) \in X_i$,

(H'4) $F_i(t,x) \subset F_i(t,x') + K\,|x-x'|\,B$ per $(t,x), (t,x') \in X_i$,

dove K è una costante e $B = \{x \mid |x| \leq 1\}$.

Posto

$$H_i(t,x,p) = \max\{p.u \mid u \in F_i(t,x)\}\ ,\quad 1 \leq i \leq k,$$

si ha il seguente

Teorema 3. Sia $\{a_i^*, b_i^*, x_i^*(\cdot)\}_{i=1}^k$ una soluzione del problema (Q) tale che

grafico di $x_i^*(\cdot) \subset$ interno di X_i, $1 \le i \le k$.

Se sono soddisfatte le ipotesi (H'1)-(H'4), (H5) e se S è chiuso, esistono i numeri reali $\lambda \ge 0$, h_i^*, k_i^* e le funzioni assolutamente continue $p_i(\cdot)$: $[a_i^*, b_i^*] \to R^{n_i}$ tali che

$$(-\dot{p}_i(t), \dot{x}_i^*(t)) \in \partial_{x,p} H_i(t, x_i^*(t), p_i(t)) \qquad \text{q.d. su } [a_i^*, b_i^*],$$

$$h_i \in \operatorname*{co\,ess}_{t \to a_i^*} H_i(t, x_i^*(a_i^*), p_i(a_i^*)),$$

$$k_i \in \operatorname*{co\,ess}_{t \to b_i^*} H_i(t, x_i^*(b_i^*), p_i(b_i^*)),$$

$$\{-h_i^*, k_i^*, p_i(a_i^*) - p_i(b_i^*)\}_{i=1}^k \in N_S(z^*) + \lambda f(z^*),$$

$$\lambda + \sum_{i=1}^k |p_i(b_i^*)| = 1,$$

essendo $z^* = \{a_i^*, b_i^*, x_i^*(a_i^*), x_i^*(b_i^*)\}$.

La dimostrazione è contenuta in [2]. Qui ci limitiamo a quella parte di dimostrazione relativa ai "valori essenziali".

Con procedimenti più o meno standard (Cfr. [4]) si trasforma il problema (Q) in uno dello stesso tipo, ma con in più le seguenti condizioni soddisfatte:

a) $X_i \supset$ grafico di $x_i^*(\cdot) + 2\,\varepsilon\, B, \quad \varepsilon > 0;$

b) $f(\{a_i, b_i, p_i, q_i\}) = \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot q_i,$

con $f_i \in R^{n_i}$ costanti;

c) $\{a_i^*, b_i^*, x_i^*(\cdot)\}$ è l'unica soluzione per il nuovo problema.

Si pone

$$\tilde{X}_i = \text{grafico di } x_i^*(\cdot) + \varepsilon\, B,$$

$$I_i = [a_i^* - \varepsilon, b_i^* + \varepsilon],$$

$$\zeta = \{\alpha_i, \beta_i, \xi_i, \eta_i\}_{i=1}^{k}$$

e si considera il problema

$$\sum_{1}^{k} f_i \cdot x_i(b_i) \to \inf = V(\zeta)$$

$$x_i(\cdot) : I_i \to R^{n_i} \text{ lipschitziana,}$$

$$\dot{x}_i(t) \in F_i(t,x_i(t)) \qquad \text{q.d. su } [a_i,b_i] \subset I_i,$$

$$(Q(\zeta)) \qquad \dot{x}_i(t) = 0 \qquad \text{q.d. su } I_i \setminus [a_i,b_i],$$

$$\text{grafico di } x_i(\cdot) \subset \tilde{X}_i,$$

$$\{a_i,b_i,x_i(a_i), x_i(b_i)\}_{i=1}^{k} \in S + \zeta.$$

Per questo problema si ha il seguente

Lemma 1. Se esiste qualche traiettoria ammissibile per $(Q(\zeta))$, allora $V(\zeta) =$ minimo.

Sia

$$\zeta_n \to \zeta \ , \ V(\zeta_n) = \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot x_{n_i}(b_{n_i}).$$

Allora

i) esistono una soluzione $\{a_i, b_i, x_i(\cdot)\}$ per $(Q(\zeta))$ e una sottosuccessione della successione $\{an_i, bn_i, xn_i(\cdot)\}$ (che indichiamo con gli stessi simboli) tali che

$$an_i \underset{n\to\infty}{\to} a_i, b_{n_i} \to x_{n_i}(\cdot) \to x_i(\cdot) \text{ unif. su } I_i;$$

ii) se inoltre

$$\zeta = 0 \text{ e } V(\zeta_n) \to V(o),$$

allora si ha $\{a_i, b_i, x_i(\cdot)\} = \{a_i^*, b_i^*, x_i^*(\cdot)\}$.

iii) $ep_i\, V = \{(\zeta, r) | r \geq V(\zeta)\}$ è chiuso.

Definizione 3. Il vettore $v \neq 0$ si dice *perpendicolare* al chiuso C nel punto $c \in C$ (in simboli $v \perp C$ in c) se esiste una costante $M \geq 0$ tale che

$$v \cdot (c'-c) \leq M\, |c'-c|^2 \text{ per ogni } c' \in C.$$

La ragione della denominazione è

dovuta al fatto che

$$\left|\frac{1}{2M}v\right| \leq \left|c' - (c + \frac{1}{2M}v)\right|$$

per ogni $c' \in C$.

Ricordiamo le seguenti proprietà delle perpendicolari [4].

Lemma 2. Esiste un sottoinsieme denso della frontiera di C che possiede perpendicolari a C in ogni suo punto. Si ha inoltre

$$\partial d_C(c) = co(\{o\} \cup \{ \lim_{i\to\infty} \frac{v_i}{|v_i|} \mid o \neq v_i \perp C \text{ in } c_i \underset{i\to\infty}{\to} c\}),$$

$$N_C(c) = \overline{\bigcup_{r \geq 0} r\,\partial d_C(c)} \quad \text{(chiusura)},$$

essendo $d_C(c) = \inf\{|c'-c| \mid c' \in C\}$.

Per il lemma 1, epi V è chiuso e quindi il punto frontiera $(o,V(o))$ è limite di una successione ζ_n, $V(\zeta_n)+\delta_n)$ di punti frontiera di epiV nei quali esiste un vettore perpendicolare $v_n \neq 0$.

Lemma 3. Sia $o \neq v = (\{h_i, -k_i, -\sigma_i, \tau_i\}_{i=1}^{k}, -\lambda)$ perpendicolare a epiV in $(\bar{\zeta}, V(\bar{\zeta}) + \bar{\delta})$, sia $\{\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{x}_i(\cdot)\}$ soluzione del problema $(Q(\bar{\zeta}))$ tale che

grafico di $\bar{x}_i(\cdot) \subset$ interno di $\tilde{X}_i$

e sia inoltre $\{\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{x}_i(\bar{a}_i), \bar{x}_i(\bar{b}_i)\}_{i=1}^{k} = \bar{s} + \bar{\zeta}$, $\bar{s} \in S$.

Allora esistono le funzioni assolutamente continue $p_i(\cdot)\ I_i \to R^{n_i}$ tali che

i) $$(-\dot{p}_i(t), \dot{x}_i(t)) \in \begin{cases} \partial H_i(t, \bar{x}_i(t), p_i(t)) & \text{q.d. su } [\bar{a}_i, \bar{b}_i], \\ \{0,0\} & \text{q.d. su } I_i \setminus [\bar{a}_i, \bar{b}_i] \end{cases}$$

ii) $p_i(\bar{a}_i) = \sigma_i$,

iii) $p_i(\bar{b}_i) = \tau_i - \lambda f_i$,

iv) $h_i \in \underset{t \to \bar{a}_i}{\text{co ess}}\ H_i(t, \bar{x}_i(\bar{a}_i), p_i(\bar{a}_i))$,

v) $k_i \in \underset{t \to \bar{b}_i}{\text{co ess}}\ H_i(t, \bar{x}_i(\bar{b}_i), p_i(\bar{b}_i))$,

vi) $\{-h_i, k_i, \sigma_i, -\tau_i\}_{i=1}^{k} \in \left| \{-h_i, k_i, \sigma_i, -\tau_i\} \right| \partial d_S(\bar{s})$,

vii) $\lambda + \sum_{i=1}^{k} \left| p_i(\bar{b}_i) \right| > 0$

Se $\delta \geq 0$, $s \in S$ e se $\{a_i, b_i, x_i(\cdot)\}$ soddisfa tutte le condizioni in $(Q(\zeta))$ a eccezione dell'ultima, si ha

$$V(\{a_i, b_i, x_i(a_i), x_i(b_i)\} - s) \leq \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot x_i(b_i)$$

e quindi

$$(\{a_i, b_i, x_i(a_i), k_i(b_i)\} - s, \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot x_i(b_i) + \delta) \in \text{epi } V$$

e, dalla definizione di perpendicolare,

$$\text{(viii)} \qquad 0 \leq -v \cdot [(\{a_i, b_i, x_i(a_i), x_i(b_i)\} - s) - (\{\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{x}_i(\bar{a}_i), \bar{x}_i(\bar{b}_i)\} - \bar{s}),$$

$$\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (x_i(b_i) - \bar{x}_i(\bar{b}_i)) + \delta - \bar{\delta}] + M \cdot |[\ldots]|^2 =$$

$$= [\{-h_i, k_i, \sigma_i, -\tau_i\} \cdot (\{a_i - \bar{a}_i, b_i - \bar{b}_i, x_i(a_i) - \bar{x}_i(\bar{a}_i), x_i(b_i) - \bar{x}_i(\bar{b}_i)\} -$$

$$-(s - \bar{s})) + \lambda \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i(b_i) - \bar{x}_i(\bar{b}_i)) + \lambda(\delta - \bar{\delta})] + M\, |[\ldots]|^2$$

Se poniamo nella formula (viii)

$$\{a_i, b_i, x_i(\cdot)\} = \{\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{x}_i(\cdot)\},$$

otteniamo

$$\{-h_i, k_i, \sigma_i, -\tau_i\} \cdot (s - \bar{s}) - \lambda(\delta - \bar{\delta}) \leq M(|s - \bar{s}|^2 + (\delta - \bar{\delta})^2)$$

Se poniamo anche $s = \bar{s}$, otteniamo

$$0 \leq \lambda(\delta - \bar{\delta}) + M(\delta - \bar{\delta})^2, \quad \forall \delta \geq 0$$

e quindi $\lambda \geq 0$.

Se invece poniamo $\delta - \bar{\delta}$, otteniamo

$$\{-h_i, k_i, \sigma_i, -\tau_i\} \perp S \text{ in } \bar{s}$$

e di qui segue, per il Lemma 2, la condizione (vi).

Ora fissiamo i e poniamo nella formula (viii)

$$s = \bar{s}, \ \delta = \bar{\delta}, \ a_j = \bar{a}_j, \ b_j = \bar{b}_j \qquad \text{per } 1 \leq j \leq k,$$

$$x_j(\cdot) = \bar{x}_j(\cdot) \ \text{ per } \ j \neq i.$$

Se $\bar{a}_i < \bar{b}_i$, otteniamo che

$$\bar{x}_i(\cdot) : [\bar{a}_i , \bar{b}_i] \to R^{n_i}$$

è soluzione di un problema di tipo (Q) con k = 1, con estremi $\bar{a}_i$ e $\bar{b}_i$ fissi, senza vincoli agli estremi e con f di classe C^1, per il quale è noto ([4], Corollario 2 al Teor. 3.2.6) che esiste $p_i : [\bar{a}_i , \bar{b}_i] \to R^{n_i}$ assolutamente continua verificante le condizioni i), ii), iii).

Se $\bar{a}_i = \bar{b}_i$ otteniamo

$$0 \le [(\sigma_i - \tau_i + \lambda f_i) \cdot (x_i(\bar{a}_i) - \bar{x}_i(\bar{a}_i))] + M \, |[...]|^2$$

Di qui segue

$$0 = \sigma_i - \tau_i + \lambda f_i$$

e qindi possiamo porre

$$p_i(\bar{a}_i) = \sigma_i = \tau_i - \lambda f_i = p_i(\bar{b}_i)$$

e avere ancora soddisfatte le condizioni i), ii), iii).

Fissiamo ancora i e poniamo in (viii)

$$s = \bar{s}\,,\ \delta = \bar{\delta}\,,\ a_j = \bar{a}_j \ \text{ per } \ 1 \le j \le k,$$

$$x_j(\cdot) = \bar{x}_j(\cdot) \text{ per } \ j \ne i.$$

Se $\bar{a}_i < \bar{b}_i$, poniamo

$$\begin{cases} b_i = \bar{b}_i - r \quad , \quad 0 < r < \bar{b}_i - \bar{a}_i, \\ x_i(t) = \bar{x}_i(t) \quad \text{per} \ \ \bar{a}_i \le t \le \bar{b}_i - r, \end{cases}$$

e otteniamo

$$0 \le [-r\,k_i + (\lambda f_i - \tau_i) \cdot (\bar{x}_i(\bar{b}_i - r) - \bar{x}_i(\bar{b}_i))] + M\,|[\ldots]|^2.$$

Si ha ora $\lambda f_i - \tau_i = -\,p_i(\bar{b}_i)$,

$$-\,p_i(\bar{b}_i) \cdot (\bar{x}_i(\bar{b}-\tau) - x_i(\bar{b}_i)) \int_{\bar{b}_i - r}^{\bar{b}_i} p_i(\bar{b}_i) \cdot \dot{\bar{x}}_i(t)\,dt,$$

$$\dot{\bar{x}}_i(t) \in F_i(t, \bar{x}_i(t)) \subset F_i(t, \bar{x}_i(\bar{b}_i)) + K\,|\bar{x}_i(t) - \bar{x}_i(\bar{b}_i)|\,B\,,$$

$$p_i(\bar{b}_i) \cdot \bar{x}_i(t) \le \max_{u \in F_i(t, \bar{x}_i\, b_i^*)} p_i(\bar{b}_i) \cdot u + K\,|p_i(\bar{b}_i)|\,|\bar{x}_i(t) - \bar{x}_i(\bar{b}_i)|$$

$$|\bar{x}_i(t) - \bar{x}_i(\bar{b}_i)| \leq \int_t^{\bar{b}_i} |\dot{\bar{x}}_i(\tau)|\, d\tau \leq (\bar{b}_i - t)K \leq rK,$$

se $\bar{b}_i - r \leq t \leq \bar{b}_i$, e quindi

$$[\ldots] \leq -r\, k_i + \int_{\bar{b}_i - r}^{\bar{b}_i} H_i(t, \bar{x}_i(\bar{b}_i), p_i(\bar{b}_i))\, dt + K^2\, |p_i(\bar{b}_i)|\, r^2.$$

Si ha anche

$$|[\ldots]| \leq r\,(|k_i| + |p_i(\bar{b}_i)| \cdot K) = rK_1$$

e quindi

$$k_i \leq \frac{1}{r} \int_{\bar{b}_i - r}^{\bar{b}_i} H_i(t, \bar{x}_i(\bar{b}_i), p_i(\bar{b}_i))dt + r\,(K^2\, |p_i(\bar{b}_i)| + MK_1^2)$$

e infine

$$\text{(ix)} \quad k_i \leq \liminf_{r \to 0+} \frac{1}{r} \int_{\bar{b}_i - r}^{\bar{b}_i} H_i(t, \bar{x}_i(\bar{b}_i), p_i(\bar{b}_i))dt$$

Sempre nell'ipotesi $\bar{a}_i < \bar{b}_i$, cerchiamo un "buon prolungamento" della traiettoria $\bar{x}_i(\cdot)$ a destra di $\bar{b}_i$. Per noti teoremi di selezione misurabile [1], [4], esistono b_i e la funzione ρ misurabile tali che

$$\bar{b}_i < b_i < b_i^* + \varepsilon,$$

$$[\bar{b}_i, b_i] \ni t \to \varphi(t) \in F_i(t, \bar{x}_i(\bar{b}_i)),$$

$$p_i(\bar{b}_i) \cdot \varphi(t) = \max\{p_i(\bar{b}_i) \cdot u / u \in F_i(t, \bar{x}_i(\bar{b}_i)\} = H_i(t, \bar{x}_i(\bar{b}_i), p_i(\bar{b}_i)).$$

Posto

$$\eta(t) = x_i(\bar{b}_i) + \int_{\bar{b}_i}^{t} \varphi(s)\, ds \quad , \quad \bar{b}_i \le t \le b_i,$$

si può applicare un classico teorema di Filippov [1], [4], eventualmente dopo aver diminuito b_i, per affermare che esiste $\xi(\cdot)$: $[\bar{b}_i, b_i] \to R^{n_i}$ assolutamente continua tale che

$$\dot{\xi}(t) \in F_i(t, \xi(t)) \quad \text{q.d. su } [\bar{b}_i, b_i],$$

$$\xi(\bar{b}_i) = \bar{x}_i(\bar{b}_i) \ ,$$

grafico di $\xi(\cdot) \subset \tilde{X}_i$,

$$\int_{\bar{b}_i}^{b_i} |\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t)| \, dt \leq K^2 (b_i - \bar{b}_i)^2 e^{K(b_i - \bar{b}_i)}$$

Poniamo ora

$$a_i = \bar{a}_i \ ,$$

$$x_i(t) = \bar{x}_i(t) \ \text{ per } \ \bar{a}_i \leq t \leq \bar{b}_i,$$

$$x_i(t) = \xi(t) \text{ per } \bar{b}_i \leq t \leq b_i = \bar{b}_i + r$$

e otteniamo dalla formula (viii) (ricordiamo che continua ad essere $s = \bar{s}$, $\delta = \bar{\delta}$, $x_j(\cdot) = \bar{x}_j(\cdot)$ per $j \neq i$)

$$0 \leq [k_i r - (\tau_i - \lambda f_i) \cdot (\xi(\bar{b}_i + r) - \xi(\bar{b}_i))] + M \, |[...]|^2$$

Si ha $\tau_i - \lambda f_i = p_i(\bar{b}_i)$,

$$p_i(\bar{b}_i) \cdot (\xi(\bar{b}_i + r) - \xi(\bar{b}_i)) = \int_{\bar{b}_i}^{\bar{b}_i + r} p_i(\bar{b}_i) \cdot \dot{\xi}(t) dt =$$

$$= \int_{\bar{b}_i}^{\bar{b}_i+r} p_i(\bar{b}_i) \cdot \dot{\eta}(t)dt + \int_{\bar{b}_i}^{\bar{b}_i+r} p_i(\bar{b}_i) \cdot (\dot{\xi}(t) - \dot{\eta}(t))\, dt\,,$$

$|[\ldots]| \leq r\, K_1$ (K_1 costante)

e quindi

$$\frac{1}{r} \int_{\bar{b}_i}^{\bar{b}_i+r} H_i(t, \bar{x}_i(\bar{b}_i), p(\bar{b}_i))dt \leq k_i + Mr\, K_1^2 + |p_i(\bar{b}_i)|\, K^2\, r\, e^{Kr}$$

Pertanto si ha

$$\text{(x)} \qquad \limsup_{r \to 0+} \frac{1}{r} \int_{\bar{b}_i}^{\bar{b}_i+r} H_i(t, \bar{x}_i(\bar{b}_i), p_i(\bar{b}_i))dt \leq k_i$$

Da (ix) e (x) segue (v) (Cfr. [1], Lemma 1.1).

In modo analogo si ottiene (iv), sempre nel caso di $\bar{a}_i < \bar{b}_i$.

Se $\bar{a}_i = \bar{b}_i = c_i$, si possono ancora fare "buoni prolungamenti" di $\bar{x}_i(\cdot)$ a sinistra di $\bar{a}_i$ e a destra di $\bar{b}_i$ e si ottiene ancora (x) e inoltre

$$\text{(xi)} \qquad h_i \leq \liminf_{r \to 0+} \frac{1}{r} \int_{c_i-r}^{c_i} H_i(t, \bar{x}_i(c_i), p_i(c_i))dt.$$

Affinchè (xi) e (ix) coincidono e quindi valgono (iv) e (v) basta provare che $h_i = k_i$. Per questo poniamo

$$x_i(t) = \bar{x}_i(t) = \bar{x}_i(c_i) \text{ per } c_i \leq t \leq c_i + r \quad (o < r \text{ piccolo})$$

e otteniamo da (viii) (ricordiamo che $s = \bar{s}, \ldots$)

$o \leq [-h_i r + k_i r] + M \left| [\ldots] \right|^2$

e di qui segue

$$k_i \leq h_i.$$

In modo analogo si ottiene $h_i \leq k_i$.

Infine si ha

$$0 < |v| \leq \lambda + \sum_{i=1}^{k} (|h_i| + |k_i| + |\sigma_i| + |\tau_i|)$$

e dalle ipotesi fatte, dalle affermazioni del lemma già provate e dal lemma di Gronwall segue

$$|h_i| \leq K\, |p_i(\bar{a}_i)|\,,\ |k_i| \leq K\, |p_i(\bar{b}_i)|\,,$$

$$|\tau_i| \leq |p_i(\bar{b}_i)| + \lambda\, |f_i|\,,$$

$$|\dot{p}_i(t)| \leq K\,|p_i(t)| \qquad \text{q.d. su} \quad [\bar{a}_i, \bar{b}_i],$$

$$|\sigma_i| = |p_i(\bar{a}_i)| \leq |p_i(\bar{b}_i)|\, e^{K(\bar{b}_i - \bar{a}_i)}.$$

Pertanto si ha, con una certa costante $\bar{K} \geq 1$,

$$0 < |v| \leq \bar{K}(\lambda + \sum_{i=1}^{k} |p_i(\bar{b}_i)|)$$

e così è completata la dimostrazione del lemma.

La dimostrazione del Teorema 3 si ottiene applicando il Lemma 3 alle successioni

$$\text{epi } V \ni (\zeta_n, V(\zeta_n) + \delta_n) \to (0, V(0)),$$

$$0 \neq V_n \perp \text{ epi } V \text{ in } (\zeta_n, V(\zeta_n) + \delta_n)$$

e passando al limite per mezzo del Lemma 1 e della Proposizione 1. Successioni di questo tipo esistono, per il Lemma 1 e il Lemma 2.

Rientrano fra i problemi di tipo (P) i problemi di controllo impulsivo con al più k-1 salti; infatti basta aggiungere le condizioni

$$b_i = a_{i+1} \qquad \text{per } 1 \leq i \leq k-1$$

alle altre che figurano in (P). Su [3] è particolarmente studiato il caso $k = 2$.

Per concludere consideriamo due applicazioni.

Esempio 2. Consideriamo il problema

$$\int_0^\tau \frac{d\sigma}{v_1(x(\sigma))} + \int_\tau^T \frac{d\sigma}{v_2(x(\sigma))} \to \min$$

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad \text{q.d. su } [0,T],$$

$$|u(t)| = 1 \quad \text{"}$$

$$x(o) = x_o\,,\ x(\tau) \in \Sigma\ ,\quad x(T) = x_1,$$

$$0 \le \tau \le T\,,$$

con $x(\cdot)$ assolutamente continua su $[0,T]$, $u(\cdot)$ misurabile, v_1, v_2 $R^n \to R$ localmente lipschitziane e positive, Σ chiuso, x_o e x_1 costanti.

Questo è un problema di tipo (P) con

$$S = \{((a,b,p,q), (a',b',p',q'))/a = 0 \le b = a' \le b'\ ,\ p = x_o,$$

$$q = p' \in \Sigma\,,\ q' = x_1\}.$$

Se $n = 3$, si può interpretare (principio di Fermat) una soluzione $x(\cdot)$ del problema considerato come traiettoria di un raggio luminoso che parte da x_o, si propaga con velocità v_1 in un mezzo isotropo (non omogeneo) fino al tempo τ in cui raggiunge Σ e successivamente si propaga con velocità v_2 in un altro mezzo isotropo fino al tempo T in cui raggiunge x_1.

In [3] si prova che dal Teorema 2 segue che ogni soluzione $(\tau, T, x(\cdot): [0,T] \to R^n)$, con $0 < \tau < T$, è di classe C^1 su $[0,\tau[$ e su $]\tau,T]$, che esistono $\dot{x}(\tau-)$ e $\dot{x}(\tau+)$ e che esiste $d \in N_\Sigma(x(\tau))$ per cui si ha

$$\frac{\dot{x}(\tau+)}{v_2(x(\tau))} - \frac{\dot{x}(\tau-)}{v_1(x(\tau))} = d.$$

Se $d = 0$, di qui segue

$$v_1(x(\tau)) = v_2(x(\tau)) \qquad \text{e} \qquad \dot{x}(\tau-) = \dot{x}(\tau+)$$

Se $d \neq 0$ invece si ha

i) $\dot{x}(\tau-)$, $\dot{x}(\tau+)$, d sono complanari;

ii) $$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{v_1(x(\tau))} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{v_2(x(\tau))},$$

con $0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$ e

$$d \cdot \dot{x}(\tau-) = |d| \cos \theta_1 \ , \ d \cdot \dot{x}(\tau+) = |d| \cos \theta_2.$$

Esempio 3. Consideriamo il problema

$$\phi_o e^{\delta\tau} - \int_o^\tau e^{-\delta t} [\pi_1 x_1(t)-c_1] u(t)dt - \int_\tau^T e^{-\delta t} [\pi_2 x_2(t) - c_2] u_2(t)dt \to \min$$

$$\dot{x}_1(t) = F_1(x_1(t)) - \sigma_1 x_1(t)u(t) \qquad \text{q.d. su } [0,\tau],$$

$$\dot{x}_2(t) = F_2(x_2(t)) - \sigma_2 x_2(t)u(t) \qquad \text{q.d. su } [\tau,T],$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 \qquad \text{q.d. su } [0,T],$$

$$x_1(o) = x_1 \ , \ x_2(\tau) = z(\tau),$$

$$0 \leq \tau \leq T,$$

con $z(\cdot) : [0,\tau] \to R$ tale che

$$\dot{z}(t) = F_2(z(t)) \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq \tau \ , \ z(0) = x_2,$$

e con $x_i(\cdot)$ funzioni a valori reali.

Anche questo è un problema di tipo (P).

In [3] viene presentato come un modello per il migliore sfruttamento di un allevamento di due diversi tipi di popolazioni animali di dimensioni x_i, con

funzioni di crescita naturale F_i, prezzi unitari di vendità π_i, frazione di popolazione raccolta $\sigma_i u(t)$,... ecc..

Dal Teorema 2 si ottiene, fra l'altro, la seguente condizione

$$\pi_2 x_2(\tau)-c_2 = \pi_1 x_1(\tau) - c_1 + \delta\phi_o + e^{\delta\tau} p_2(\tau)\, \sigma_2\, x_2(\tau),$$

conseguenza del legame posto frai valori essenziali dalla condizione di trasversalità. Almeno in line adi principio, la condizione ottenuta può essere usata per determinare il tempo τ.

BIBLIOGRAFIA

[1] AUBIN, J.P.; CELLINA, A.: Differential inclusions, Springer, 1984.

[2] CLARKE, F.H.; VINTER R.B.: Optimal multiprocesses, SIAM J. Control Optim. 27, 5 (1989), 1072-91.

[3] CLARKE, F.H.; VINTER R.B.; Applications of optimal multiprocesses, SIAM J. Control Optim. 27, 5 (1989), 1048-71.

[4] CLARKE, F.H.: Optimization and nonsmooth analysis, Wiley-Interscience, New York, 1983.

[5] CLARKE, F.H.; LOEWEN, P.D.; VINTER R.B.: Differential inclusions with free time, Ann. Inst. H. Poincaré, 5, 6 (1988), 573-93.